Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Fonctions réelles de la variable réelle – Intégration des fonctions réelles

Le but de l'intégration est de définir un nombre qui, pour une fonction f positive sur un segment $[a,b]$, mesure l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Ce nombre est appelé intégrale de f sur $[a,b]$ notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$.

1. Intégrale des fonctions en escalier

1.1. Subdivision

Définition :

On appelle subdivision d'un segement $[a,b]$ toute famille $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ de réels telle que $a=a_0<a_1<\dots<a_n=b$.
On appelle pas de la subdivision σ le réel $\text{pas}(\sigma)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}|a_{i+1}-a_i|$.

Définition :

On dit que la subdivision σ est régulière s'il existe $h>0$ tel que $\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ a_{i+1}-a_i=h$.

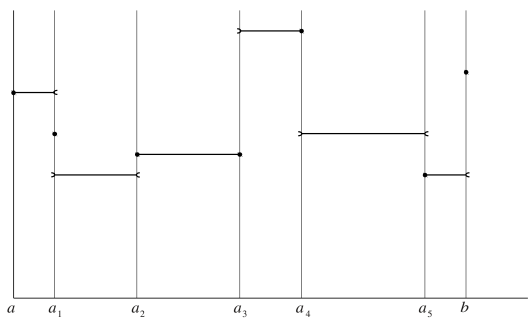
Propriété :

Le pas d'une subdivision régulière est $h=\dfrac{b-a}{n}$, et on a alors $\forall i\in[\![0,n]\!],\ a_i=a_0+ih=a_0+i\dfrac{b-a}{n}$

1.2. Fonctions en escalier

Définition :

Une fonction $\varphi\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ est dite en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ du segment $[a,b]$ telle que $\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ \varphi_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est une fonction constante c_i.
σ est alors appelée subdivision adaptée à φ.



Définition :

On note $\mathcal{E}(a,b)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Propriétés :

- Une fonction en escalier sur un segment ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est donc bornée.
- Si φ et ψ sont deux foncions en escalier, alors il existe une subdivision commune adaptée à φ et ψ.
- La somme et le produit de deux fonctions en escalier est en escalier.
- Le produit d'une fonction en escalier par un scalaire est ue fonction en escalier.
- L'ensemble des fonctions en escalier forme un anneau et un espace vectoriel.

1.3. Intégrale d'une fonction en escalier

Soit f une fonction sur un segment $[a,b]$. On veut définir un nombre appelé intégrale de f sur $[a,b]$ et noté $\int_{[a,b]} f$ qui mesure l'aire algébrique comprise entre les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$, la courbe de f et l'axe des abscisses.

Définition :

Soient φ une fonction en escalier sur $[a,b]$, et σ une subdivision adaptée à φ : $\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ \varphi_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est une fonction constante c_i. On appelle intégrale de φ sur $[a,b]$ et on note $\int_{[a,b]}\varphi=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i$

Remarque :

Cette définition est cohérente car le nombre $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i$ ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à φ.

Propriétés :

1. Linéarité : $\forall \varphi,\psi\in\mathcal{E}(a,b)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\int_{[a,b]}(\lambda\varphi+\psi)=\lambda\int_{[a,b]}\varphi+\int_{[a,b]}\psi$
2. Chasles : $\forall\varphi\in\mathcal{E}(a,b)$, $\forall c\in]a,b[$, $\int_{[a,b]}\varphi=\int_{[a,c]}\varphi+\int_{[c,b]}\varphi$
3. Positivité : Si $\varphi\in\mathcal{E}(a,b)$, $\varphi\geqslant 0 \Rightarrow \int_{[a,b]}\varphi\geqslant 0$
4. Croissance : Si $\varphi,\psi\in\mathcal{E}(a,b)$, $\varphi\leqslant\psi \Rightarrow \int_{[a,b]}\varphi\leqslant\int_{[a,b]}\psi$.

Preuve :

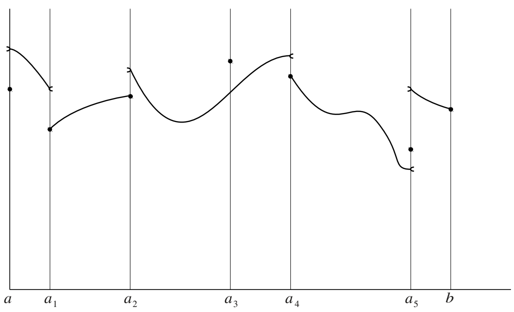
1. Soient $\varphi,\psi\in\mathcal{E}(a,b)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ adaptée à φ et ψ, et des nombres c_i et d_i tels que $\forall i\in[\![0,n-1]\!]$, $\forall x\in]a_i,a_{i+1}[$, $\varphi(x)=c_i$ et $\psi(x)=d_i$, donc $(\lambda\varphi+\psi)(x)=\lambda c_i+d_i$
   D'où $\int_{[a,b]}(\lambda\varphi+\psi)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(\lambda c_i+d_i)=\lambda\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i+\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)d_i=\lambda\int_{[a,b]}\varphi+\int_{[a,b]}\psi$
2. Notons d'abord que si $\varphi\in\mathcal{E}(a,b)$ alors $\forall c\in]a,b[$, les restrictions de φ à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont en escalier.
   Considérons maintenant une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ adaptée à φ qui contient c : désignons par p l'entier strictement positif compris entre 0 et n tel que $c=a_p$.
   $$\int_{[a,b]}\varphi=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i=\sum_{i=0}^{p-1}(a_{i+1}-a_i)c_i+\sum_{i=p}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i=\int_{[a,b]}\varphi_{|[a,c]}+\int_{[c,b]}\varphi_{|[c,b]}$$
3. Si φ est positive, tous les c_i sont positifs et comme $a_{i+1}-a_i>0$, $\int_{[a,b]}\varphi=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i>0$
4. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à $\psi-\varphi$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

2. Fonctions continues par morceaux

2.1. Définition

Définition :

Une fonction $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ du segment $[a,b]$ telle que $\forall i\in[\![0,n-1]\!]$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_i,a_{i+1}]$, ou encore $\forall i\in[\![0,n-1]\!]$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est continue sur $]a_i,a_{i+1}[$ et admet des limites finies en a_i et a_{i+1}.
σ est appelée subdivision adaptée à φ.



Propriétés :

− Une fonction continue par morceaux est bornée.
− Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.
− La somme et le produit de deux fonctions continues par morceaux est une fonction continue par morceaux.
− Le produit d'une fonction continue par morceaux par un scalaire est une fonction continue par morceaux.
− L'ensemble des fonctions continues par morceaux forme un anneau et un espace vectoriel.

2.2. Approximation des fonctions continues par morceaux

Proposition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. $\forall\varepsilon>0$, il existe une fonction θ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)-\theta(x)|\leqslant\varepsilon$.

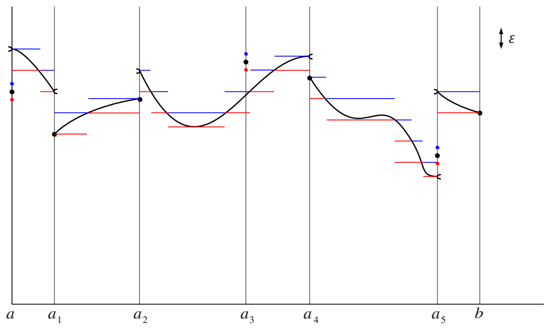
Preuve :

Soit ε fixé. D'après le théorème de Heine, la fonction f continue sur le segment $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$. Il existe donc $\alpha>0$ tel que $\forall x\in[a,b],\ \ \forall y\in[a,b],\ \ |x-y|\leqslant\alpha\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$.

Prenons une subdivision $\sigma=(a_0,\ldots,a_n)$ de pas constant inférieur à α et définissons une fonction θ en escalier sur $[a,b]$ en posant $\theta(a)=f(a)$ et $\theta(x)=f(a_i)$ si $x\in]a_i,a_{i+1}]$

Pour $x\in]a,b]$ et $i\in[\![0,n-1]\!]$ tels que $a_i<x<a_{i+1}$, on a $|x-a_i|\leqslant\alpha$ donc $|f(x)-\theta(x)|=|f(x)-f(a_i)|\leqslant\varepsilon$

Comme de plus $f(a)=\theta(a)$, on a $\forall x\in[a,b],\ \ |f(x)-\theta(x)|\leqslant\varepsilon$.



Théorème :

> Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.
> $\forall\varepsilon>0$, il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi\leqslant f\leqslant\psi$ et $0\leqslant\psi-\varphi\leqslant\varepsilon$.

Preuve :

Soit $\sigma=(a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision adaptée à la fonction f continue par morceaux. Pour $i\in[\![0,n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i,a_{i+1}[$ se prolonge en une fonction f_i continue sur $[a_i,a_{i+1}]$. Soit ε fixé. D'après la proposition précédente, on peut trouver une fonction θ_i en escalier sur $[a_i,a_{i+1}]$ telle que $|f_i-\theta_i|\leqslant\varepsilon$.

La fonction θ définie par : $\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ \ \theta=\theta_i$ sur $]a_i,a_{i+1}[$ et $\forall i\in[\![0,n]\!],\ \ \theta(a_i)=f(a_i)$ est en escalier et vérifie $|f-\theta|\leqslant\varepsilon$.

En prenant une fonction en escalier θ telle que $|f-\theta|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, les fonctions en escalier $\varphi=\theta-\frac{\varepsilon}{2}$ et $\psi=\theta+\frac{\varepsilon}{2}$ vérifient :

$\varphi\leqslant f\leqslant\psi$ et $\psi-\varphi\leqslant\varepsilon$.

2.3. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition :

> Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on note $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus grandes que f et $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus petites que f.

Proposition :

> Si f est une fonction continue par morceaux, alors :
>
> $-\ A^-(f)=\left\{\int_{[a,b]}\varphi,\ \ \varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$ admet une borne supérieure,
>
> $-\ A^+(f)=\left\{\int_{[a,b]}\psi,\ \ \psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$ admet une borne inférieure,
>
> et ces deux bornes sont égales.

Preuve de la proposition :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Elle est bornée : notons $m=\inf(f)$ et $M=\sup(f)$

– La fonction constante m (respectivement M) appartient à $\mathcal{E}^-(f)$ (respectivement à $\mathcal{E}^+(f)$) donc $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ sont non vides. De plus, si $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$, alors $\varphi\leqslant f\leqslant M$, donc $\int_{[a,b]}\varphi\leqslant\int_{[a,b]}M=M(b-a)$.

L'ensemble $A^-(f)$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc possède une borne supérieure α.

De même, $A^+(f)$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc possède une borne inférieure β.

– Toute fonction φ de $\mathcal{E}^-(f)$ est inférieure à toute fonction ψ de $\mathcal{E}^+(f)$, donc $\int_{[a,b]}\varphi\leqslant\int_{[a,b]}\psi$

Soit $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$ fixé.L'ensemble $A^-(f)$ est majoré par $\int_{[a,b]}\psi$, sa borne supérieure α est plus petite que $\int_{[a,b]}\psi$.

$\forall\psi\in\mathcal{E}^+(f),\ \ \alpha\leqslant\int_{[a,b]}\psi$, le réel α est donc un minorant de $A^+(f)$, donc il est plus petit que la borne inférieure de $A^+(f)$, donc $\alpha\leqslant\beta$.

– Soit $\varepsilon>0$. D'après le théorème d'appoximation, on peut trouver $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$ et $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$ telles que $\psi-\varphi\leqslant\varepsilon$.

On a alors $\int_{[a,b]}\psi-\int_{[a,b]}\varphi=\int_{[a,b]}(\psi-\varphi)\leqslant\varepsilon(b-a)$

Or, par définition de α et β, on a $\int_{[a,b]}\varphi\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\int_{[a,b]}\psi$

D'où $\forall\varepsilon>0,\ \ 0\leqslant\beta-\alpha\leqslant\int_{[a,b]}\psi-\int_{[a,b]}\varphi\leqslant\varepsilon(b-a)$, et finalement $\alpha=\beta$.

Définition :

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel $\int_{[a,b]} f=\sup\left\{\int_{[a,b]}\varphi,\ \ \varphi\in\varepsilon^-(f)\right\}=\inf\left\{\int_{[a,b]}\psi,\ \ \psi\in\varepsilon^+(f)\right\}$.

Remarque :

Si f est en escalier sur $[a,b]$, elle est bien continue par morceaux et son intégrale en tant que fonction continue par morceaux est la même que son intégrale en tant que fonction en escalier, ce qui permet de noter de la même façon ces deux intégrales. En effet, $f\in\varepsilon^-(f)\cap\varepsilon^+(f)$ et donc son intégrale en tant que fonction en escalier est le plus grand élement de $\left\{\int_{[a,b]}\varphi,\ \ \varphi\in\varepsilon^-(f)\right\}$ et le plus petit élément de $\left\{\int_{[a,b]}\psi,\ \ \psi\in\varepsilon^+(f)\right\}$.

Remarque :

Si $m=\inf_{[a,b]}(f)$ et $M=\sup_{[a,b]}(f)$, alors n est une fonction en escalier inférieure à f et M est une fonction en escalier supérieure à f et on a l'encadrement $m(b-a)\leqslant\int_{[a,b]} f\leqslant M(b-a)$.

Définition :

On appelle valeur moyenne de f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ le réel $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$.

3. Propriétés de l'intégrale

3.1. Linéarité, Chasles

Proposition : Linéarité de l'intégrale :

Pour toutes fonctions f et g continues par morceaux sur $[a,b]$ et pour tout réel λ, on a $\int_{[a,b]}\lambda f+g=\lambda\int_{[a,b]} f+\int_{[a,b]} g$.

Preuve :

- Si f est une fonction continue par morceaux et si θ est une fonction en escalier telle que $|f-\theta|\leqslant\varepsilon$, on a $\theta-\varepsilon\leqslant f\leqslant\theta+\varepsilon$, d'où $\int_{[a,b]}(\theta-\varepsilon)\leqslant\int_{[a,b]} f\leqslant\int_{[a,b]}(\theta+\varepsilon)$, et donc (linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier) : $\left|\int_{[a,b]} f-\int_{[a,b]}\theta\right|\leqslant(b-a)\varepsilon$
- Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et λ un réel. Pour tout $\varepsilon>0$, prenons θ_1 et θ_2 en escalier telles que $|f-\theta_1|\leqslant\varepsilon$ et $|g-\theta_2|\leqslant\varepsilon$, et alors $\left|\int_{[a,b]} f-\int_{[a,b]}\theta_1\right|\leqslant(b-a)\varepsilon$ et $\left|\int_{[a,b]} g-\int_{[a,b]}\theta_2\right|\leqslant(b-a)\varepsilon$

  Posons $h=\lambda f+g$ et $\theta=\lambda\theta_1+\theta_2$. On a $|h-\theta|\leqslant|\lambda||f-\theta_1|+|g-\theta_2|\leqslant(|\lambda|+1)\varepsilon$

  On en déduit donc que $\left|\int_{[a,b]} h-\int_{[a,b]}\theta\right|\leqslant(b-a)(|\lambda|+1)\varepsilon$

  La linéarité de l'intégrale sur $\varepsilon(a,b)$ permet d'écrire $I=\int_{[a,b]}\theta=\int_{[a,b]}(\lambda\theta_1+\theta_2)=\lambda\int_{[a,b]}\theta_1+\int_{[a,b]}\theta_2$

  Ce qui donne $\left|\lambda\int_{[a,b]} f+\int_{[a,b]} g-I\right|\leqslant(b-a)(|\lambda|+1)\varepsilon$

  Et donc $\Delta=\left|\int_{[a,b]} h-\lambda\int_{[a,b]} f-\int_{[a,b]} g\right|=\left|\int_{[a,b]} f-I+I-\lambda\int_{[a,b]} f-\int_{[a,b]} g\right|\leqslant\left|\int_{[a,b]} h-I\right|+\left|I-\lambda\int_{[a,b]} f-\int_{[a,b]} g\right|$
  $\leqslant 2(b-a)(|\lambda|+1)\varepsilon$

  Ce qui prouve $\Delta=0$ et finalement $\int_{[a,b]}(\lambda f+g)=\lambda\int_{[a,b]} f+\int_{[a,b]} g$.

Remarque :

Cela revient à dire que l'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Proposition : Relation de Chasles :

Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ et pour tout réel $c\in]a,b[$, $\int_{[a,b]} f=\int_{[a,c]} f+\int_{[c,b]} f$.

Preuve :

Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ plus petite que f. On a alors $\varphi_{|[a,c]}\in\mathcal{E}^-(f_{|[a,c]})$ et $\varphi_{|[c,b]}\in\mathcal{E}^-(f_{|[c,b]})$.

Donc $\int_{[a,b]}\varphi=\int_{[a,c]}\varphi_{|[a,c]}+\int_{[c,b]}\varphi_{|[c,b]}\leqslant\int_{[a,c]}f_{|[a,c]}+\int_{[c,b]}f_{|[c,b]}$

Le réel $\int_{[a,c]}f_{|[a,c]}+\int_{[c,b]}f_{|[c,b]}$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\int_{[a,b]}\varphi,\ \ \varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$, il est donc plus grand que la borne supérieure de ce dernier, d'où $\int_{[a,b]}f\leqslant\int_{[a,c]}f_{|[a,c]}+\int_{[c,b]}f_{|[c,b]}$.

En aplliquant (linéarité) ce résultat à $-f$, on en déduit l'inégalité inverse, et donc $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,c]}f_{|[a,c]}+\int_{[c,b]}f_{|[c,b]}$.

Remarque :

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision adaptée à f. Notons f_i la fonction continue sur $[a_i,a_{i+1}]$ dont la restriction à $]a_i,a_{i+1}[$ est égale à celle de f. La relation de Chasles donne

$$\int_{[a,b]}f=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]}f=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]}f_i$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux est la somme d'intégrales de fonctions continues.

3.2. Inégalités

Proposition :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

1. Positivité de l'intégrale : $f\geqslant 0\ \Rightarrow\ \int_{[a,b]}f\geqslant 0$
2. Croissance de l'intégrale : $f\leqslant g\ \Rightarrow\ \int_{[a,b]}f\leqslant\int_{[a,b]}g$
3. Inégalité triangulaire : $\left|\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\int_{[a,b]}|f|$
4. Inégalité de la moyenne : $\left|\int_{[a,b]}f\,g\right|\leqslant\sup_{[a,b]}|f|\int_{[a,b]}|g|$
5. Inégalité de la moyenne : $\left|\int_{[a,b]}f\right|\leqslant(b-a)\sup_{[a,b]}|f|$.

Preuve :

1. La fonction nulle est en escalier sur $[a,b]$ et inférieure à f donc appartient à $\mathcal{E}^-(f)$ donc $\int_{[a,b]}0\leqslant\sup(\mathcal{E}^-(f))=\int_{[a,b]}f$
2. On a $g-f$ continue par morceaux et $g-f>0$. On utilise le 1. et la linéarité de l'intégrale.
3. La valeur absolue étant continue sur $\mathbb{R}$, $|f|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. De plus $-|f|\leqslant f\leqslant|f|$, donc d'après 2. on a $-\int_{[a,b]}|f|\leqslant\int_{[a,b]}f\leqslant\int_{[a,b]}|f|$, d'où $\left|\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\int_{[a,b]}|f|$
4. $|f|$ étant continue par morceaux sur $[a,b]$, elle est bornée : $\sup_{[a,b]}|f|$ existe. On a alors $\forall x\in[a,b], |f(x)g(x)|\leqslant\sup_{[a,b]}|f||g(x)|$ et 2. donne l'inégalité recherchée.
5. On reprend 4. avec $g=1$.

3.3. Extension

Définition :

Ici on ne suppose plus nécessairement que $a<b$. Soit f continue par morceaux sur I. Pour tout $(a,b)\in I^2$, on définit le réel $\int_a^b f(x)dx$ par :

Si $a<b$, $\int_a^b f(x)dx=\int_{[a,b]}f$ Si $a=b$, $\int_a^b f(x)dx=0$ Si $a>b$, $\int_a^b f(x)dx=-\int_{[a,b]}f$

Remarque :

On conserve les propriétés de linéarité et la relation de Chasles mais pas les inégalités.

Proposition :

Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b]$.

1. $f\geqslant 0$ et $a\leqslant b\ \Rightarrow\ \int_a^b f\geqslant 0$
2. $f\leqslant g$ et $a\leqslant b\ \Rightarrow\ \int_a^b f\geqslant\int_a^b g$
3. $a\leqslant b\ \Rightarrow\ \left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|f|$
4. $a\leqslant b\ \Rightarrow\ \left|\int_a^b f\,g\right|\leqslant\sup_{[a,b]}|f|\int_a^b|g|$
5. $\left|\int_a^b f\right|\leqslant|b-a|\sup_{[a,b]}|f|$

3.4. Cas des fonctions continues

Proposition :

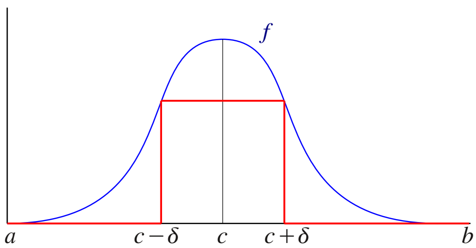
Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$, $a<b$.
L'intégrale de f sur $[a,b]$ est nulle si et seulement si f est nulle sur $[a,b]$.

Preuve :

$\Rightarrow$: Si f est nulle, son intégrale est nulle.

$\Leftarrow$: Raisonnons par contraposée : supposons que f ne soit pas partout nulle sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(x)>0$. D'après la définition de la continuité de f en c avec $\varepsilon=\dfrac{f(c)}{2}$,

$\exists\,\delta>0$ tel que $\forall\,x\in[a,b],\ |x-c|\leqslant\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(c)|\leqslant\varepsilon$.



Si on pose $\alpha=\min\left(\delta,\dfrac{b-a}{2}\right)$, l'un au moins des segments $[c-\alpha,c],[c,c+\alpha]$ est inclus dans $[a,b]$;

Or l'intégrale de f sur ce segment est supérieure ou égale à $\alpha\varepsilon>0$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est alors forcément strictement positive.

Remarque :

Si f est seulement continue par morceaux, le résultat est faux : par exemple $f(x)=0$ sur $]0,1[$ et $f(0)=1$ est continue par morceaux, positive et non nulle et pourtant $\int_0^1 f=0$.

Définition : somme de Riemann :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et n un entier strictement positif. On appelle somme de Riemann associée à la subdivision de $[a,b]$ de pas régulier $\dfrac{b-a}{n}$ le réel $R_n=\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Théorème :

Si f est continue sur $[a,b]$, alors $\lim \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)=\int_{[a,b]} f$

Preuve :

f est continue sur le segment $[a,b]$ ($a<b$) donc uniformément continue :

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0$ tel que $\forall\,x,y\in[a,b],\ |x-y|\leqslant\alpha\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$

$\exists\,N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\,n>N,\ \dfrac{b-a}{n}\leqslant\alpha$, et $\forall\,i\in[\![0,n-1]\!],\ a_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$

$$\left|R_n-\int_a^b f\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(a_i)-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(a_i)\,dx-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(a_i)-f(x))\,dx\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(a_i)-f(x)|\,dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varepsilon\,dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\varepsilon \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

Donc $R_n\to\int_a^b f$.

3.5. Produit scalaire

Définition :

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle produit scalaire sur E toute

– forme : φ : $E\times E\to\mathbb{R}$

– bilinéaire : $x\mapsto\varphi(x,y)$ et $y\mapsto\varphi(x,y)$ sont linéaires

– symétrique : $\forall(x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$

– définie : $\forall\,x\in E,\ \varphi(x,x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0$

– positive : $\forall\,x\in E,\ \varphi(x,x)\geqslant 0$.

Proposition :

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, $a<b$.
$(f,g)\mapsto\int_{[a,b]} f\,g$ est un produit scalaire sur E.

Preuve :

Notons $\varphi(f,g)=\int_a^b f\,g$.

$-\ \varphi(f,g)=\int_a^b f\,g\in\mathbb{R}$: forme, et $\varphi(f,g)=\int_a^b f\,g=\int_a^b g\,f=\varphi(g,f)$: symétrique

$-\ \forall g,f_1,f_2\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(\lambda f_1+f_2,g)=\int_a^b(\lambda f_1+f_2)g=\lambda\int_a^b f_1 g+\int_a^b f_2 g=\lambda\varphi(f_1,g)+\varphi(f2,g)$

φ linéaire par rapport à la première variable et symétrique $\Rightarrow$ bilinéaire.

$-\ \varphi(f,f)=\int_a^b f^2\geqslant 0$ (positivité de l'intégrale et $a<b$) : positive

$-\ \varphi(f,f)=0\ \Rightarrow\ \int_a^b f^2=0$, or $f^2\geqslant 0$ et f^2 continue sur $[a,b]$ et $a<b\ \Rightarrow\ f^2=x\mapsto 0\ \Rightarrow\ f=x\mapsto 0$.

$f=x\mapsto 0\ \Rightarrow\ \int_a^b f^2\ \Rightarrow\ \varphi(f,f)=0$: définie.

Proposition : Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, $a<b$.
On a $\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2\leqslant\int_{[a,b]} f^2\int_{[a,b]} g^2$
L'égalité est vérifiée si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

Preuve :

Soient f et $g\in E$. On pose $P(t)=\int_a^b(t\,f(x)+g(x))^2dx\ \geqslant 0\,\forall t\in\mathbb{R}$

$P(t)=\left(\int_a^b(f(x))^2dx\right)t^2+2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)t+\int_a^b(g(x))^2dx=At^2+2Bt+C$ (polynôme)

Si $f\neq x\mapsto 0$, $A\neq 0$ et P est un polynôme de degré 2 toujours positif, donc $\Delta\leqslant 0$, et $A>0$.

$$\Delta=4(B^2-4AC)\leqslant 0\ \Leftrightarrow\ B^2\leqslant AC\ \Leftrightarrow\ \left(\int_a^b f\,g\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

Si $f=x\mapsto 0$, l'inégalité devient $0\leqslant 0$: l'inégalité est vraie, et le cas d'égalité et aussi vérifié.

Cas d'égalité si $f\neq x\mapsto 0$:

$\Rightarrow$: il y a égalité donc $\Delta=0$: $\exists t_0\in\mathbb{R}$ tel que $P(t_0)=0\ \Leftrightarrow\ \int_a^b(t_0 f(x)+g(x))^2dx=0$

$(t_0 f+g)^2\geqslant 0$ et continue $\Rightarrow\ (t_0 f+g)^2=0\ \Rightarrow\ g=-t_0 f\ \Rightarrow\ f$ et g proportionnelles.

$\Leftarrow$: Si f et g sont proportionnelles, $g=\alpha f$ (ou $f=\alpha g$, revient à $f=x\mapsto 0$)

$\left(\int_a^b f\,g\right)^2=\left(\int_a^b\alpha f^2\right)^2=\alpha^2\left(\int_a^b f^2\right)^2$ et $\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)=\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b\alpha^2 f^2\right)=\alpha^2\left(\int_a^b f^2\right)^2$: égalité.

4. Intégration et dérivation

4.1. Primitives

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable telle que $F'=f$.

Proposition :

Soit f une fonction contnue sur I. Si F est une primitive de f, alors G est une autre primitive de f si et seulement si $G=F+c$, avec $c\in\mathbb{R}$.

4.2. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un inervalle I, a un point de I. Alors :

1. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a
2. Pour toute primitive F de f sur I, $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

Preuve :

1. $\forall x \in I$, f est continue sur $[a, x]$ donc $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est bien définie, et $F_a(a) = 0$

   $\forall x_0 \in I,\ \forall x \neq x_0,\ \dfrac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} = \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0}$

   f est continue en x_0 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$

   $\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = (x - x_0) f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = \dfrac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt$

   Soit $\Delta = \dfrac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)$: $|\Delta| = \left| \dfrac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)\,dt \right|$

   Pour x tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$ (et donc $|t - x_0| \leqslant \delta$) :

   Si $x_0 < x$: $|\Delta| \leqslant \dfrac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt \leqslant \dfrac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon\,dt = \dfrac{1}{x - x_0} \varepsilon (x - x_0) = \varepsilon$

   Si $x_0 > x$: $|\Delta| \leqslant \dfrac{1}{-(x - x_0)} \int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leqslant \dfrac{1}{x_0 - x} \int_{x_0}^x \varepsilon\,dt = \dfrac{1}{x_0 - x} \varepsilon (x_0 - x) = \varepsilon$

   Donc $\dfrac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} \to f(x_0)$ donc F_a est dérivable et $F_a' = f$.

   Si G est une autre primitive de f qui s'annule en a, alors $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F_a + c$

   $G(a) = F_a(a) + c \Leftrightarrow 0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0 \quad \to$ Unicité

2. $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $F = F_a + c$, et $F(x) - F(a) = F_a(x) + c - F_a(a) - c = \int_a^x f(t)\,dt - 0 = \int_a^x f(t)\,dt$.

4.3. Étude de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$

Proposition :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$, et $f : J \to \mathbb{R}$ continue. La fonction $g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est défine sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\forall x \in I,\ g'(x) = f(v(x)) v'(x) - f(u(x)) u'(x)$.

Preuve :

$\forall x \in I,\ \left. \begin{array}{l} u(x), v(x) \in J \\ J \text{ est un intervalle} \end{array} \right\} \Rightarrow [u(x), v(x)] \subset J$

f est continue sur J donc est continue sur $[u(x), v(x)]$, donc $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ existe, et g est définie sur I.

f est continue sur J donc admet une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.

De plus, $\forall x \in I, g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.

Par composition, g est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall x \in I,\ g'(x) = v'(x) F'(v(x)) - u'(x) F'(u(x))$.

5. Calcul de primitives

5.1. Intégration par parties

Théorème :

Si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv'$.

Notation :

Pour représenter une intégration par parties, on peut utiliser ce schéma :

$$\begin{array}{c|ccc} + & f(t) & & g^{(n)}(t) \\ - & f'(t) & & g^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1} & f^{(n-1)}(t) & & g'(t) \\ (-1)^n & f^{(n)}(t) & \int & g(t) \end{array}$$

Preuve :

u,v de classe $\mathscr{C}^1$ $\Rightarrow$ u',v' continues $\Rightarrow$ $u'v$ et uv' sont continues.

$\int_a^b u'v+\int_a^b uv'=\int_a^b u'v+uv'=\int_a^b (uv)'=[uv]_a^b$.

Proposition :

Soient f et g : $[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$,

alors $\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)dt=\left[\sum_{k=0}^{n-1}((-1)^k f^k)(t)g^{(n-k-1)}(t)\right]_a^b+(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)dt$.

Preuve :

Récurrence sur n :

- Pour $n=0$: $\int_a^b f(t)g(t)dt=0+\int_a^b f(t)g(t)dt$, la proposition est vraie au rang 0.
- Supposons $n\in\mathbb{N}$ et la proposition vraie au rang n.

  Soient g et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, et notons $h=g'$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $\int_a^b f(t)h^{(n)}(t)dt=\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)h^{(n-k-1)}(t)\right]_a^b+(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)h(t)dt$

  $$\begin{aligned}\text{Donc } \int_a^b f(t)g^{(n+1)}(t)dt&=\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)h^{(n-k-1)}(t)\right]_a^b+(-1)^n\left(\left[f^{(n)}(t)g(t)\right]_a^b-\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)\right)\\ &=\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n+1-k-1)}(t)\right]_a^b+(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)dt\end{aligned}$$

Par récurrence, la proposition est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5.2. Changement de variables

Théorème :

Soient I et J deux intervalles, f : $J\to\mathbb{R}$ continue, φ : $I\to J$ de classe $\mathscr{C}^1$ et a et $b\in I$.

Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Preuve :

f est continue sur J donc admet une primitive F, et $(F\circ\varphi)'=\varphi'\times F'\circ\varphi=\varphi'\times f\circ\varphi$.

$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=[F\circ\varphi]_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))=[F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$.

Proposition :

Soit f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue.

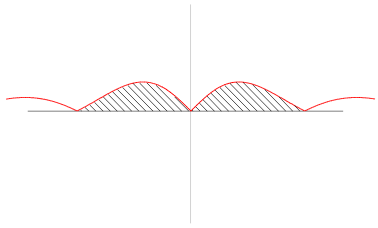
1. Si f est paire, alors $\forall a>0$, $\int_{-a}^a f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$
2. Si f est impaire, alors $\forall a>0$, $\int_{-a}^a f(t)dt=0$
3. Si f est p-périodique, alors $\forall a\in\mathbb{R}$, $\int_a^{a+p} f(t)dt=\int_0^p f(t)dt$.

Preuve :

1. $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=\int_{-a}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

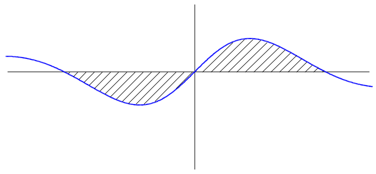
   On pose : $u=-t$, et on a $du=-dt$: $\begin{array}{llll} t & : & -a & \rightarrow & 0 \\ u & : & a & \rightarrow & 0 \end{array}$

   $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=\int_{a}^{0} f(u)\,du=\int_{0}^{a} f(t)\,dt$, Donc $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$



2. En utilisant le même changement de variable :

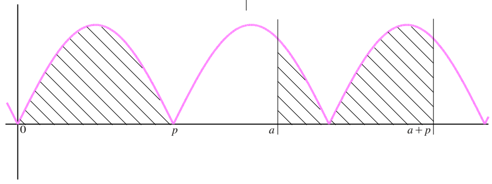
   $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=\int_{a}^{0} f(u)\,du=-\int_{0}^{a} f(t)\,dt$, Donc $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=0$



3. $\int_{a}^{a+p} f(t)\,dt=\int_{a}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{p} f(t)\,dt+\int_{p}^{a+p} f(t)\,dt$

   On pose : $u=t-p$, et on a $du=dt$: $\begin{array}{lllll} t & : & p & \rightarrow & a+p \\ u & : & 0 & \rightarrow & a \end{array}$

   $\int_{p}^{a+p} f(t)\,dt=\int_{0}^{a} f(u)\,du=-\int_{a}^{0} f(t)\,dt$, Donc $\int_{a}^{a+p} f(t)\,dt=\int_{0}^{p} f(t)\,dt$



5.3. Autres changements de variables classiques

Fractions rationnelles :

On commence par décomposer en éléments simples.

Règles de Bioches : calcul de $\int F(\cos(x),\sin(x))\,dx$ ***:***

On pose $\omega(x)=F(\cos(x),\sin(x))\,dx$

- Si $\omega(-x)=\omega(x)$, poser $u=\cos(x)$
- Si $\omega(\pi-x)=\omega(x)$, poser $u=\sin(x)$
- Si $\omega(\pi+x)=\omega(x)$, poser $u=\tan(x)$
- Si tout marche, poser $u=\cos(2x)$
- Sinon, poser $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Fractions en e^x ***ou*** $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ ***:***

Poser $t=e^x$.

Quelques pistes :

$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$: poser $x=\mathrm{ch}(u)$ et reconnaître

$\mathrm{ch}^2(u)-1=\mathrm{sh}^2(u)\ldots$

$\int x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$: Poser $t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, en déduire $x\ldots$

5.4. Formulaire

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Ensemble de validité
$e^{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
x^{α}, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}_-\setminus\{0,-1\}$ $\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\ln\lvert x\rvert-x$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n\in\mathbb{Z}$
$\mathrm{cotan}(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$]n\pi,(n+1)\pi[$, $n\in\mathbb{Z}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$	$]n\pi,(n+1)\pi[$, $n\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n\in\mathbb{Z}$

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Ensemble de validité
$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}=1+\mathrm{cotan}^2(x)$	$-\mathrm{cotan}(x)$	$]n\pi,\ (n+1)\pi[$, $n\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$, $a\in\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$
	$\mathrm{argth}(x)$	$]-1,1[$
$\frac{1}{a^2-x^2}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$	$]-\infty,-a[$, $]-a,a[$, $]a,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$	$]-\infty,-1[$, $]1,+\infty[$
	$\mathrm{argsh}(x)$	$]1,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{argsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$

* * * * *

Mis à jour le 17.08.10